Лекция 5. Булева алгебра и методы упрощения логических функций

Цель лекции – предоставить студентам понимание основ Булевой алгебры, ее важность для цифровой электроники, а также рассмотреть методы упрощения логических функций, такие как использование карты Карно, алгебраических методов.

Введение

Цифровые схемы классифицируются как комбинационные или последовательные. Выходы комбинационной схемы зависят только от текущих значений входов; другими словами, она объединяет текущие входные значения для вычисления выходных данных. Например, логический вентиль является комбинационной схемой. Выходы последовательной схемы зависят как от текущих, так и от предыдущих значений входов; другими словами, она зависит от последовательности входов. Комбинационная схема не имеет памяти, но последовательная схема имеет память. Функциональная спецификация комбинационной схемы обычно выражается в виде таблицы истинности или булевого уравнения.

Булева алгебра – это математическая структура, используемая для работы с логическими переменными и операциями. Основные операции булевой алгебры включают:

- **И (AND)**: $A{\cdot}B$;
- **ИЛИ (OR)**: $A{+}B$;
- **НЕ (NOT)**: $\bar{A}$.

Правила булевой алгебры во многом похожи на правила обычной алгебры, но в некоторых случаях проще, поскольку переменные имеют только два возможных значения: 0 или 1.

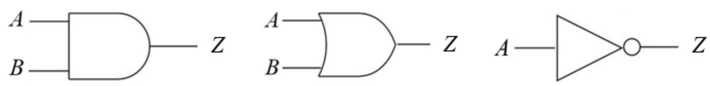

Рисунок 3.1. Логические элементы И, ИЛИ и НЕ

Аксиомы и теоремы булевой алгебры

Булева алгебра основана на наборе аксиом, которые мы предполагаем правильными. Аксиомы недоказуемы в том смысле, что определение не может быть доказано. В таблице 3.1 приведены пять основных аксиом Булевой алгебры.

Таблица 3.1. Аксиомы Булевой алгебры

№	Аналитическое выражение	Примечания
1	$B = 0$, если $B \neq 1$; $B = 1$, если $B \neq 0$.	Аксиома двойственности
2	$\bar{0} = 1$; $\bar{1} = 0$	НЕ
3	$0{\cdot}0 = 0$; $1 + 1 = 1$	И / ИЛИ
4	$1{\cdot}1 = 1$; $0 + 0 = 0$	И / ИЛИ
5	$0{\cdot}1 = 1{\cdot}0 = 0$; $1 + 0 = 0 + 1 = 1$	И / ИЛИ

Из этих аксиом можно доказать все теоремы Булевой алгебры. Эти теоремы имеют большое практическое значение, поскольку они учат нас, как упрощать логику для создания меньших и менее затратных схем. В таблице 3.2 приведены теоремы Булевой алгебры для уравнений с одной переменной.

Таблица 3.2. Теоремы Булевой алгебры

№	Аналитическое выражение	Примечания
1	$B \cdot 1 = B; B + 0 = B$	Теорема идентичности
2	$B \cdot 0 = 0; B + 1 = 1$	Теорема о нулевом элементе
3	$B \cdot B = B; B + B = B$	Теорема идемпотентности
4	$\bar{\bar{B}} = B$	Теорема двойной инверсии (инволюция)
5	$B \cdot \bar{B} = 0; B + \bar{B} = 1$	Теорема о дополнении

Теорема идентичности утверждает, что для любой булевой переменной *B*, *B* И 1 = *B*, и *B* ИЛИ 0 = *B*. На аппаратном уровне, как показано на рис. 3.2, это означает, что если один вход двухвходового элемента И всегда равен 1, мы можем удалить элемент И и заменить его проводом, подключенным к переменному входу (*B*). Точно также, если один вход двухвходового элемента ИЛИ всегда равен 0, мы можем заменить элемент ИЛИ проводом, подключенным к *B*. В общем случае вентили стоят денег, энергии и задержки, поэтому замена вентиля проводом выгодна.

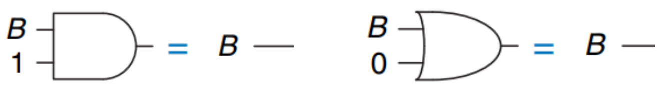

Рисунок 3.2. Теорема нейтрального элемента в аппаратном реализации: И и ИЛИ

Теорема о нулевом элементе гласит, что *B* И 0 всегда равно 0. Поэтому 0 называется нулевым элементом для операции И, потому что он сводит на нет действие любого другого входа. Для элемента ИЛИ она гласит, что *B* ИЛИ 1 всегда равно 1. Следовательно, 1 является нулевым элементом для операции ИЛИ. В оборудовании, как показано на рис.3.3, если один из входов элемента И равен 0, мы можем заменить вентиль И проводом, который привязан к 0. Аналогично, если один из входов вентиля ИЛИ равен 1, мы можем заменить вентиль ИЛИ проводом, который привязан к 1.

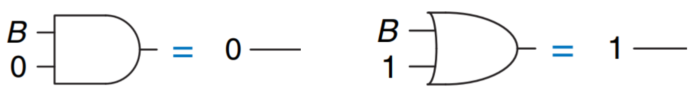

Рисунок 3.3. Теорема о нулевом элементе в аппаратном реализации: И и ИЛИ

Идемпотентность утверждает, что переменная И сама по себе равна самой себе. Аналогично, переменная ИЛИ сама по себе равна самой себе. Теорема получила свое название от латинских корней: idem (тот же) и potent (мощность). Операции возвращают то же самое, что вы в них вложили. Рис. 3.4 показывает, что идемпотентность снова позволяет заменить элемент проводом.

Рисунок 3.4. Теорема идемпотентности в аппаратном реализации: И и ИЛИ

Двойная инверся или инволюция показывает, что дополнение переменной дважды приводит к исходной переменной. В цифровой электронике два неправильных варианта дают правильный. Два инвертора, включенные последовательно, логически нейтрализуют друг друга и логически эквивалентны проводу, как показано на рис. 3.5.

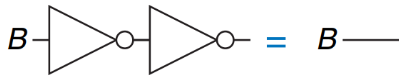

Рисунок 3.5. Теорема двойной инверсии или инволюции в аппаратном реализации

Теорема о дополнении утверждает, что *любая переменная* И *ее дополнение* равны 0 (поскольку одно из них должно быть равно 0), а *любая переменная* ИЛИ *ее дополнение* равны 1 (поскольку одно из них должно быть равно 1) (рис. 3.6).

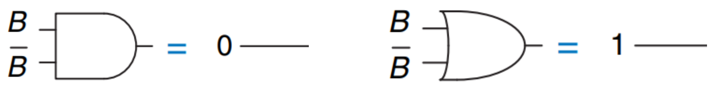

Рисунок 3.6. Теорема о дополнении в аппаратном реализации для элементов И и ИЛИ

Теоремы Булевой алгебры для уравнений с несколькими переменными

В таблице 2.3 приведены теоремы Булевой алгебры для уравнений с несколькими переменными. Они описывают, как упрощать уравнения, включающие более одной булевой переменной.

Таблица 3.3. Теоремы Булевой алгебры о нескольких переменных

№	**Аналитическое выражение**	**Примечания**
1	$B \cdot C = C \cdot B; B + C = B + C$	Теорема коммутативности
2	$(B \cdot C) \cdot D = B \cdot (C \cdot D);$ $(B + C) + D = B + (C + D).$	Теорема ассоциативности
3	$(B \cdot C) + (B \cdot D) = B \cdot (C + D);$ $(B + C) \cdot (B + D) = B + (C \cdot D).$	Теорема дистрибутивности
4	$B \cdot (B + C) = B;$ $B + (B \cdot C) = B.$	Теорема поглощения
5	$(B \cdot C) + (B \cdot \bar{C}) = B;$ $(B + C) \cdot (B + \bar{C}) = B;$	Теорема комбинирования
6	$(B \cdot C) + (\bar{B} \cdot D) + (C \cdot D) = B \cdot C + \bar{B} \cdot D;$ $(B + C) \cdot (\bar{B} + D) \cdot (C + D) = (B + C) \cdot (\bar{B} + D);$	Теорема консенсуса
7	$\overline{B \cdot C \cdot D} = \bar{B} + \bar{C} + \bar{D};$ $\overline{B + C + D} = \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D};$	Теорема Де Моргана

Для упрощения схем, содержащих И-НЕ и ИЛИ-НЕ, нужно использовать теорему, разработанную математиком Августом Де Морганом. Эта теорема позволяет нам преобразовать выражение, имеющее черту инверсии над двумя или более переменными, в выражение, имеющее черту инверсии только над одной переменной. Согласно теореме Де Моргана, элемент И-НЕ эквивалентен вентилю ИЛИ с инвертированными входами. Аналогично, вентиль ИЛИ-НЕ эквивалентен вентилю И с инвертированными входами. На рис. 3.7 показаны эти эквивалентные вентили Де Моргана для вентилей И-НЕ и ИЛИ-НЕ.

$$Z = \overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{A} \qquad Z = \overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{A}$$

A	B	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Рисунок 3.7. Теорема о дополнении в аппаратном реализации для элементов И и ИЛИ

Методы упрощения логических функций – Карта Карно

Существуют несколько методов упрощения логических функций:
- Метод Карно (Карта Карно)
- Алгебраические методы
- Метод Квайна-МакКласки
- Применение программных инструментов

Карта Карно – это графический способ минимизации логических выражений. Они были изобретены в 1953 году Морисом Карно, инженером по телекоммуникациям в Bell Labs. Карты Карно хорошо подходят для задач с числом переменных до четырех..

Карта Карно похожа на таблицу истинности тем, что она графически показывает выходной уровень булева уравнения для каждой из возможных комбинаций входных переменных. Каждый выходной уровень размещается в отдельной ячейке карты Карно. Карты Карно можно использовать для упрощения уравнений с двумя, тремя, четырьмя, пятью или шестью различными входными переменными. Решение карт Карно с пятью и шестью переменными чрезвычайно обременительно; их можно более практично решить с помощью передовых компьютерных технологий.

Определение количества ячеек в карте Карно аналогично нахождению количества комбинаций или записей в таблице истинности. Для двухпеременной карты требуется 2^2 = 4 ячейки. Для трехпеременной карты требуется 2^3 = 8 ячеек. Для карты с четырьмя переменными требуется 2^4 = 16 ячеек. Три различные карты Карно показаны на рис.3.8.

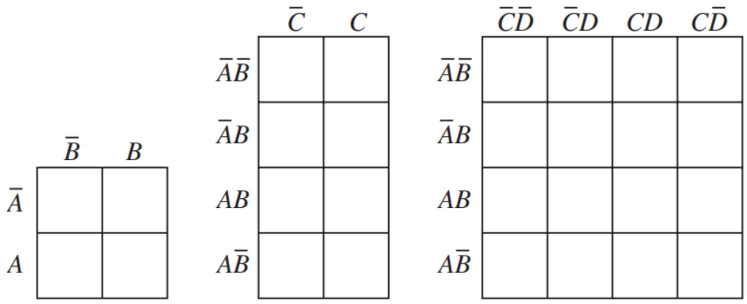

Рисунок 3.8. Двух-, трех-, и четырех-переменные карты Карно.

Каждая ячейка карты Карно соответствует определенной комбинации входных переменных. Например, в двухпеременной карте Карно верхняя левая ячейка соответствует $\bar{A}\bar{B}$, нижняя левая ячейка – $A\bar{B}$, верхняя правая ячейка – $\bar{A}B$, а нижняя правая ячейка – AB.

Также обратите внимание, что при переходе из одной ячейки в соседнюю ячейку изменяется только одна переменная. Например, посмотрите на карту Карно с тремя переменными. Верхняя левая ячейка - $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$; соседняя ячейка, расположенная сразу под ней - $\bar{A}B\bar{C}$. В этом случае $\bar{A}\bar{C}$ остался прежним, и только $\bar{B}$ изменился на B. То же самое справедливо для каждой соседней ячейки.

Чтобы использовать процедуру упрощения карты Карно, необходимо выполнить следующие действия:

1. Преобразовать логическое уравнение в уравнение с умножениями и сложениями;

2. Заполнить соответствующие ячейки карты Карно..

3. Окружить соседние клетки группами по две, четыре или восемь. (Чем больше соседних ячеек обведено, тем проще итоговое уравнение; смежность означает, что стороны соприкасаются, а не по диагонали.)

4. Найти каждый член окончательного уравнения, определив, какие переменные остаются постоянными внутри каждого круга.

Теперь давайте рассмотрим уравнение: $X = \bar{A}(\bar{B}C + \bar{B}\bar{C}) + \bar{A}B\bar{C}$.

Сначала преобразуем уравнение в выражение с умножениями и сложениями: $X = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C}$. Члены этого выражения можно поместить в таблицу истинности, а затем перенести на карту Карно, как показано на рис. 3.9.

A	B	C	X
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

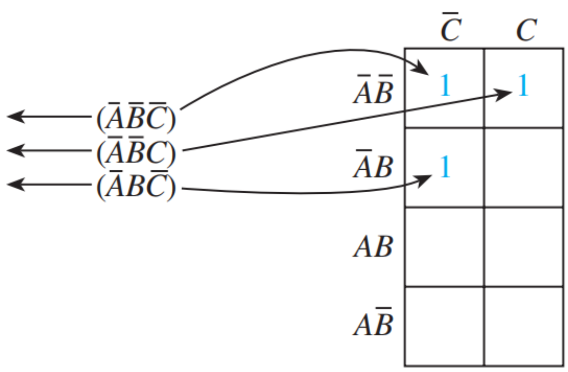

Рисунок 3.9. Таблица истинности и карта Карно для $X = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C}$.

Работая с картой Карно, мы теперь обводим кружком соседние единицы группами по две, четыре или восемь. В итоге у нас получится два круга по две ячейки в каждом, как показано на рис.3.10. Первый круг окружает две единицы в верхней части карты Карно, а второй круг окружает две единицы в левом столбце карты Карно.

После того, как нарисованы круги, охватывающие все единицы на карте, окончательное упрощенное уравнение получается путем определения того, какие переменные остаются неизменными в пределах каждого круга. Итак, первый круг (сверху) охватывает $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ и $\bar{A}\bar{B}C$. Переменные, которые остаются неизменными внутри круга, это $\bar{A}\bar{B}$. Таким образом, $\bar{A}\bar{B}$ становится одним из членов в окончательном уравнении. Второй круг (левый столбец) охватывает $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ и $\bar{A}B\bar{C}$. Переменные, которые остаются неизменными внутри этого круга – это $\bar{A}\bar{C}$. Следовательно, второй член в конечном уравнении равен $\bar{A}\bar{C}$.

Итак, $X = \bar{A}(\bar{B}C + \bar{B}\bar{C}) + \bar{A}B\bar{C} = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{C}$.

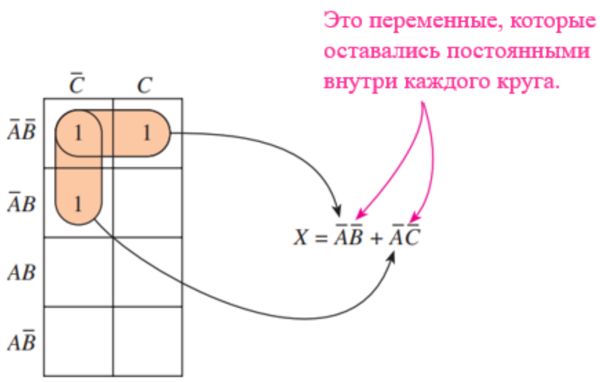

Рисунок 3.10. Окружение соседних ячеек на карте Карно

Контрольные вопросы:

1. Что такое Булева алгебра и каковы её основные операции?
2. Перечислите и объясните пять основных аксиом Булевой алгебры.
3. Что утверждает теорема идентичности в Булевой алгебре?
4. Объясните, как работает теорема двойной инверсии (инволюции) и приведите пример её применения.
5. Объясните, как теорема Де Моргана применяется для упрощения логических выражений.
6. Что говорит теорема о дополнении и как её можно использовать для упрощения логических функций?
7. Что такое карта Карно и для чего она используется?